- PARTIE I -

Préliminaire :

1°) On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt$ (intégrale de Wallis) avec $n \in \mathbb{N}$

Montrer que I_n s'exprime en fonction de I_{n-2}.
En déduire l'expression de I_{2n} en fonction de n.

2°) Le mouvement d'un pendule simple est régi par l'équation différentielle

$$(E_1) \quad \theta''(t) + \frac{g}{l}\sin(\theta(t)) = 0$$

où g et l sont des constantes.

Soit θ la solution de (E_1) correspondant à $\theta(0) = \alpha$ et $\theta'(0) = 0$ avec $0 < \alpha < \pi/2$. On admet que θ est une fonction périodique, dont la période T vérifie $\theta(T/2) = -\alpha$, θ étant décroissante sur [0,T/2].

a - Montrer que la quantité

$$\frac{1}{2}\theta'^2(t) - \frac{g}{l}\cos(\theta(t))$$

est constante.

b - Montrer que la période T vérifie :

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\alpha} \frac{dt}{\sqrt{\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(t/2)}}$$

En déduire que

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - a^2\sin^2(\phi)}}$$

avec $a^2 = \sin^2(\alpha/2)$.

c - Développer $(1 - a^2\sin^2(\phi))^{-1/2}$ en série entière de la variable $a\sin(\phi)$.

Justifier l'intégration de ce développement, et en déduire le développement

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 a^4 + \ldots\right\}$$

dans lequel on donnera l'expression du terme général.

d - Soit $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Pour $\alpha = \pi/4$ donner une valeur approchée de T/T_0 à la précision de 5.10^{-6} (on justifiera que la précision désirée est atteinte).

- PARTIE II -

Soit k un réel fixé tel que $0 < k < 1$.
On considère l'équation différentielle

$$(E_2) \quad y''(t)+(1+k^2)y(t)-2k^2y^3(t)=0$$

1°) Soit y une solution de (E_2). Montrer que la quantité

$$y'^2(t)+(1+k^2)y^2(t)-k^2y^4(t)$$

est constante.

2°) Soit y_1 la solution de (E_2) telle que $y_1(0) = 0$ et $y_1'(0) = 1$.

a - Montrer que y_1 est une fonction impaire.

b - Si y_1 admet un maximum pour une valeur t_0, que peut-on dire de $y_1(t_0)$?

c - Montrer que la dérivée y_1' s'annule au moins une fois sur $\mathbf{R}$: on notera τ l'abscisse du premier zéro de y_1'.
Montrer alors que y_1 est 4τ-périodique.

- PARTIE III -

On désigne toujours par k un réel vérifiant $0 < k < 1$.
Soit la fonction $x \mapsto h_k(x)$ définie par

$$h_k(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2(t)}}$$

1°)

a - Comparer $h_k(x)$ et $h_k(x+\pi)$.

b - Montrer que h_k est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$
On notera $y \mapsto am(k,y)$ (am pour amplitude) la fonction réciproque.

c - Montrer que am est dérivable sur $\mathbf{R}$ et exprimer sa dérivée en fonction de $\sin(am(k,y))$.

d - Justifier que am est solution de l'équation différentielle

$$z''(t)+k^2\sin(z(t))\cos(z(t))=0.$$

e - En déduire qu'il existe une solution de (E_1) qui s'exprime simplement en fonction de am.
A quel comportement du pendule cela correspond-il ?

2°) On pose

$$sn(k,u)=\sin(am(k,u))$$
$$cn(k,u)=\cos(am(k,u))$$

$$dn(k,u) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(u)}$$

Pour abréger les notations, lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre, on écrira sn(u) au lieu de sn(k,u), de même que cn(u) et dn(u).

a - Etudier la parité de ces fonctions.
Calculer sn(0), cn(0) et dn(0).

b - Justifier que ces fonctions sont dérivables et montrer que leurs dérivées vérifient

$$sn'(u) = cn(u)dn(u)$$
$$cn'(u) = -sn(u)dn(u)$$
$$dn'(u) = -k^2 sn(u)cn(u)$$

c - Montrer que sn est la solution de l'équation différentielle

$$y'' + (1+k^2)y - 2k^2y^3 = 0$$

vérifiant y(0) = 0 et y'(0) = 1.

d - Soit K le réel défini par

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(t)}}$$

Sans utiliser le résultat de la partie II, montrer que les fonctions sn, cn et dn sont périodiques et exprimer leurs plus petites périodes positives en fonction de K.

3°)

a - Montrer que

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(t)}} = \int_0^{\sin(x)} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

b - En déduire une expression simple de

$$\int_0^{sn(u)} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

c - Donner un D.L. à l'ordre 5 au voisinage de 0 de

$$\int \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

d - Par identification en déduire un D.L. à l'ordre 5 au voisinage de 0 de sn(u) en fonction de u.

- PARTIE IV -

Soit (C) la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x = \cos(\phi)\sqrt{2 - \sin^2(\phi)} \\ y = \sin(\phi)\cos(\phi) \end{cases}$$

1°) Représenter la courbe dans un repère orthonormé avec pour unité 4 cm.

2°) Déterminer l'abscisse curviligne sur (C) et montrer qu'elle s'exprime à l'aide des fonctions précédentes.

3°) Déterminer une expression en polaire de (C) et interpréter le paramètre ϕ.